Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Construction d'un point fixe commun à une famille de contractions fermes

Patrick L. COMBETTES

Résumé – Nous proposons une méthode générale pour construire un point fixe commun à une famille dénombrable de contractions fermes sur un espace hilbertien réel et montrons sa convergence. Dans cette méthode les contractions sont balayées par blocs variables et le domaine des paramètres de relaxation dépend du bloc choisi à chaque itération.

Construction of a common fixed point of firmly nonexpansive mappings

Résumé

Abstract – We propose a general method for finding a common fixed point of countably many firmly nonexpansive mappings on a real Hilbert space and prove its convergence. In this method, the mappings are processed in variable blocks and the range of the relaxation parameters depends on the block chosen at each iteration.

Abridged English Version – Let $(T_i)_{i \in I}$ be a countable family of firmly nonexpansive mappings on a real Hilbert space $\mathcal{H}$ [*i.e.*, (1) holds] and let F denote their set of common fixed points, which is assumed to be nonempty. In this Note we consider the problem (P) of finding a point in F. This generic problem arises in many branches of applied mathematics, e.g., solving systems of variational inequalities, solving convex feasibility problems, or finding a common zero of maximal monotone mappings [3], [9]. In addition, since T_i is firmly nonexpansive if and only if it can be written as $T_i = (\mathrm{Id} + C_i)/2$, where C_i is nonexpansive [9], (P) is closely related to the problem of finding a common fixed point of nonexpansive mappings.

To solve (P), we propose the iterative method (2), in which (a)-(c) are in force. The control sequence $(I_n)_{n \geqslant 0}$ in (a) defines the blocks of mappings processed at each iteration. The control is *admissible* if there exist positive integers $(M_i)_{i \in I}$ such that $(\forall (i,n) \in I \times \mathbb{N})\ \ i \in \bigcup_{k=n}^{n+M_i-1} I_k$, and *chaotic* if $I = \limsup_{n \to +\infty} I_n$. Algorithm (2) allows us to process several mappings in parallel and the control sequence $(I_n)_{n \geqslant 0}$ provides great flexibility in matching the computational load of each iteration to the power of the concurrent processors available. When $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{card} I_n = 1$, (2) reduces to the methods of successive approximations (3) of [2], [10]. Also note that since $L_n \geqslant 1$, the relaxation strategy (c) generalizes the standard condition $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant 2 - \varepsilon$ used in most studies [1], [2], [3], [10] as well as the relaxation scheme of the projection method of [7] in which $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant L_n$. This generalization is not only of theoretical interest but it also leads to significantly accelerated convergence [4].

THEOREM 1. – *Any sequence $(x_n)_{n \geqslant 0}$ defined by (2) with admissible control converges weakly to a point in F. The convergence is strong if $(T_i)_{i \in I}$ contains a demicompact mapping.*

THEOREM 2. – *Any sequence $(x_n)_{n \geqslant 0}$ defined by (2) with chaotic control converges strongly to a point in F if either of the following conditions is satisfied :*

(i) *The interior of F is nonempty ;*

(ii) *The family $(T_i)_{i \in I}$ is finite and contains a demicompact mapping.*

Note présentée par Pierre-Louis LIONS.

0764-4442/95/03201385 $ 2.00

Theorem 1 improves upon results of [1], [2], [3], [8] and Theorem 2 upon results of [1], [6], [7], [10]. The following result addresses a variant of (P) and is to be compared to those of [5].

THEOREM 3. – *Let* $T = \sum_{i\in I} w_i T_i$, *where* $(w_i)_{i\in I} \subset]0,1]$ *and* $\sum_{i\in I} w_i = 1$. *Take* $x_0 \in \mathcal{H}$ *and* $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \subset]0,1]$ *such that* $\alpha_n \overset{n}{\to} 0$, $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n = +\infty$, *and* $\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$. *Then the iterations* $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n) T x_n$ *converge strongly to the projection of* x_0 *onto* F.

---

1. INTRODUCTION. – Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien réel avec produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, norme $\|\cdot\|$, et distance d. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de contractions fermes de $\mathcal{H}$ dans lui-même, *i.e.* :

$$(\forall i \in I)(\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2)\ \ \langle T_i x - T_i y \mid x - y \rangle \geqslant \|T_i x - T_i y\|^2. \tag{1}$$

On note $F_i = \{f \in \mathcal{H} \mid T_i f = f\}$ l'ensemble (convexe et fermé) des points fixes de T_i et $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ l'ensemble des points fixes communs, qui est supposé non vide. On propose dans cette Note une méthode itérative pour résoudre le problème suivant :

(P) Trouver $x \in F$.

En mathématiques appliquées, (P) se présente dans plusieurs contextes – citons notamment la résolution de systèmes d'inéquations variationnelles, la recherche d'un point appartenant à plusieurs convexes, et la recherche d'un zéro commun à des opérateurs maximaux monotones [3], [9]. Remarquons également que T_i est une contraction ferme si et seulement si $T_i = (\mathrm{Id}+C_i)/2$, où C_i est une contraction [9]. (P) est donc étroitement lié au problème de la recherche d'un point fixe commun à des contractions.

2. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE. – Pour $B \in \mathbb{N}^*$, $\delta \in]0, 1/B[$, $\varepsilon \in]0, 1/2[$, et $x_0 \in \mathcal{H}$ fixés, on définit la récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = x_n + \lambda_n\Big(\sum_{i\in I_n} w_{i,n} T_i x_n - x_n\Big), \tag{2}$$

où :

(a) $I_n \subset I$ et $1 \leqslant \operatorname{card} I_n \leqslant B$;

(b) $\sum_{i\in I_n} w_{i,n} = 1$, $(\forall i \in I_n)\ w_{i,n} \geqslant 0$ et $w_{i,n} \geqslant \delta$ si $x_n \notin F_i$;

(c) $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant (2-\varepsilon) L_n$ avec $L_n = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i\in I_n} w_{i,n} \|T_i x_n - x_n\|^2}{\|\sum_{i\in I_n} w_{i,n} T_i x_n - x_n\|^2} & \text{si } x_n \notin \bigcap_{i\in I_n} F_i, \\ 1 & \text{si } x_n \in \bigcap_{i\in I_n} F_i. \end{cases}$

La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définit les blocs de contractions balayées à chaque itération. Le balayage est *admissible* s'il existe $(M_i)_{i\in I} \subset \mathbb{N}^*$ tels que $(\forall (i,n) \in I \times \mathbb{N})\ \ i \in \bigcup_{k=n}^{n+M_i-1} I_k$, et *chaotique* si $I = \limsup_{n\to+\infty} I_n$.

L'algorithme (2) permet l'emploi simultané de plusieurs contractions. D'un point de vue numérique, il peut efficacement être mis en œuvre en adaptant, par le choix des blocs de contractions, la charge de calcul de chaque itération à la puissance des processeurs parallèles dont on dispose. Lorsque $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\operatorname{card} I_n = 1$, on retrouve la méthode des approximations successives de [2], [10] :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = x_n + \lambda_n (T_{i(n)} x_n - x_n) \quad \text{où} \quad \varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant 2 - \varepsilon \quad \text{et} \quad i(n) \in I. \qquad (3)$$

Par ailleurs, en vertu de la convexité de $\|\cdot\|^2$, on a $L_n \geqslant 1$. Le mode de relaxation (c) comprend donc à la fois la condition standard $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant 2-\varepsilon$ employée dans la plupart des travaux [1], [2], [3], [10] et la condition $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant L_n$ employée dans la méthode de projection de [7]. L'intérêt pratique de cette extension est d'autoriser l'emploi de sur-relaxations extrapolées qui accélèrent très nettement l'algorithme [4].

3. CONVERGENCE. – $\overset{\circ}{F}$ est l'intérieur de F, $B(x,\gamma)$ la boule fermée de centre x et de rayon γ, et Id l'application identique sur $\mathcal{H}$. On note respectivement $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$ et $x_n \overset{n}{\to} x$ la convergence faible et la convergence forte d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ vers x. Une application $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est contractante si $(\forall (x,y) \in \mathcal{H}^2)$ $\|Tx - Ty\| \leqslant \|x-y\|$; demi-fermée si pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$ et $Tx_n \overset{n}{\to} y$ on a $Tx = y$; demi-compacte si toute suite bornée $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet un point fortement adhérent dès que $(Tx_n - x_n)_{n\geqslant 0}$ converge fortement.

LEMME 1. [2] – *Soit $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une contraction. Alors $T - \mathrm{Id}$ est demi-fermée.*

LEMME 2. – *Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite quelconque définie par (2). Alors :*

(i) *$(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet au plus un point faiblement adhérent dans F ;*

(ii) *$(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge fortement si $\overset{\circ}{F} \neq \varnothing$.*

Démonstration. – (i) et (ii) résultent de la propriété (*cf.* [1], [2])

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall f \in F) \;\; \|x_{n+1} - f\| \leqslant \|x_n - f\|. \qquad (4)$$

Pour établir (4), on déduit tout d'abord de (1) les inéquations

$$(\forall i \in I)(\forall x \in \mathcal{H})(\forall f \in F_i) \;\; \langle f - x \mid T_i x - x\rangle \geqslant \|T_i x - x\|^2. \qquad (5)$$

On fixe ensuite $f \in F$ et on définit $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\beta_n = \|x_n - f\|^2 - \|x_{n+1} - f\|^2$. Alors (2), (5), et (c) entraînent

$$\begin{aligned}
(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \beta_n &= 2\langle f - x_n \mid x_{n+1} - x_n\rangle - \|x_{n+1} - x_n\|^2 \\
&= 2\lambda_n \sum_{i\in I_n} w_{i,n} \langle f - x_n \mid T_i x_n - x_n\rangle - \frac{\lambda_n^2}{L_n} \sum_{i\in I_n} w_{i,n} \|T_i x_n - x_n\|^2 \\
&\geqslant \lambda_n (2 - \lambda_n / L_n) \sum_{i\in I_n} w_{i,n} \|T_i x_n - x_n\|^2 \qquad (6) \\
&\geqslant \varepsilon^2 \sum_{i\in I_n} w_{i,n} \|T_i x_n - x_n\|^2. \quad \square \qquad (7)
\end{aligned}$$

THÉORÈME 1. – *Toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par (2) avec balayage admissible converge faiblement vers un élément de F. La convergence est forte si $(T_i)_{i\in I}$ contient une application demi-compacte T_j.*

Démonstration. – D'après (4), $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et admet donc un point faiblement adhérent x. Au vu du lemme 2(i), il suffit de montrer $x \in F$ pour conclure $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$. Pour cela, fixons $(i,n) \in I \times \mathbb{N}$. Alors $(\exists p \in \{n, \cdots, n+M_i-1\})$ $i \in I_p$ puisque le balayage est admissible. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|T_i x_n - x_n\|^2 &\leqslant 3(\|x_p - x_n\|^2 + \|T_i x_p - T_i x_n\|^2 + \|T_i x_p - x_p\|^2) \\ &\leqslant 3(2M_i \sum_{k=n}^{n+M_i-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|T_i x_p - x_p\|^2). \end{aligned} \tag{8}$$

D'après (6) et (c), on a

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \ \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant \frac{\lambda_k}{L_k} \cdot \frac{\beta_k}{(2 - \lambda_k / L_k)} \leqslant (2\varepsilon^{-1} - 1)\beta_k. \tag{9}$$

D'autre part, en posant $\nu = \delta\varepsilon^2$, (7) et (b) donnent

$$\max_{l \in I_n} \|T_l x_n - x_n\|^2 \leqslant \nu^{-1} \beta_n. \tag{10}$$

En reportant (9) et (10) dans (8) on obtient

$$\|T_i x_n - x_n\|^2 \leqslant 3(4\varepsilon^{-1} M_i + \nu^{-1}) \sum_{k \geqslant n} \beta_k. \tag{11}$$

Cependant, d'après (4), la suite $(\|x_n - f\|)_{n\geqslant 0}$ converge. Donc $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ est sommable et $T_i x_n - x_n \overset{n}{\to} 0$. Le lemme 1 donne alors $x \in F_i$. Comme i est quelconque, on a bien prouvé $x \in F$. Enfin, si T_j est demi-compacte, x est fortement adhérent à $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et il découle de (4) que $x_n \overset{n}{\to} x$. □

COROLLAIRE 1. [2] – *Toute suite définie par* (3) *avec balayage admissible converge faiblement vers un élément de* F.

COROLLAIRE 2. – *Supposons que* $(T_i)_{i\in I}$ *est une famille finie et que* (c) *est remplacée par* $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant 2 - \varepsilon$. *Alors toute suite définie par* (2) *avec balayage admissible converge faiblement vers un élément de* F [1]. *Si, de plus,* $(T_i)_{i\in I}$ *est une famille de projections sur des convexes fermés dont l'un est bornément compact* [*son intersection avec toute boule fermée est compacte*], *alors la convergence est forte* [3].

THÉORÈME 2. – *Toute suite* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* (2) *avec balayage chaotique converge fortement vers un élément de* F *si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $\overset{\circ}{F} \neq \varnothing$;

(ii) *La famille* $(T_i)_{i\in I}$ *est finie et contient une application demi-compacte* T_j.

Démonstration. – (i) Fixons $i \in I$. Le balayage étant chaotique il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geqslant 0} \subset \mathbb{N}$ telle que $i \in \bigcap_{k\geqslant 0} I_{n_k}$. Par conséquent, (10) entraîne $T_i x_{n_k} - x_{n_k} \overset{k}{\to} 0$. Mais en vertu du lemme 2(ii) $(\exists x \in \mathcal{H})$ $x_n \overset{n}{\to} x$. Ainsi le lemme 1 implique $x \in F_i$ et, comme i est quelconque, $x \in F$. (ii) Il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ telle que $T_j x_{n_k} - x_{n_k} \overset{k}{\to} 0$ [*cf.* (i)]. Donc, puisque que T_j est demi-compacte, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet un point fortement adhérent x. D'après (4), il reste à montrer $x \in F$.

Raisonnons par l'absurde en supposant $x \notin F$. Définissons $I^+ = \{i \in I \mid x \in F_i\}$, $I^- = I \setminus I^+$, et $\mu = \min_{i \in I^-} \|T_i x - x\|$. Par ailleurs, fixons $l \in I^-$, $f \in F$, et donnons-nous un réel γ tel que

$$0 < \gamma < \frac{\mu^2 \nu}{\mu + 2\|x - f\|} \quad \text{où} \quad \nu = \delta\varepsilon^2 < 1/4. \tag{12}$$

Prenons à présent $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_p \in B(x, \gamma)$. Alors $l \notin I_p$. En effet, une extension immédiate de (10) donne

$$\left\{ \begin{array}{c} (\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in \bigcap_{i \in I_n} F_i) \\ \|x_{n+1} - z\|^2 \leqslant \|x_n - z\|^2 - \nu \max_{i \in I_n} \|T_i x_n - x_n\|^2. \end{array} \right. \tag{13}$$

Donc sous l'hypothèse $l \in I_p$ les inégalités $\|x_p - f\| \leqslant \gamma + \|x - f\|$, $\|T_l x_p - x_p\| \geqslant \|x - T_l x\| - \|x - x_p\| - \|T_l x - T_l x_p\| \geqslant \mu - 2\gamma > 0$ et (12) impliqueraient

$$\begin{aligned} \|x_{p+1} - f\|^2 &\leqslant ((1 - 4\nu)\gamma + 4\mu\nu + 2\|x - f\|)\gamma - \mu^2\nu + \|x - f\|^2 \\ &< (\mu + 2\|x - f\|)\gamma - \mu^2\nu + \|x - f\|^2 < \|x - f\|^2, \end{aligned} \tag{14}$$

en contradiction avec (4). Par suite, l étant arbitraire, $l \notin I_p \Rightarrow I^- \bigcap I_p = \varnothing \Rightarrow I_p \subset I^+ \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I_p} F_i$. Mais (13) entraîne alors $\|x_{p+1} - x\| \leqslant \|x_p - x\|$, *i.e.* $x_{p+1} \in B(x, \gamma)$. En réitérant le même raisonnement on obtient $l \notin I_{p+1}$ et par récurrence $l \notin \bigcup_{k \geqslant 0} I_{p+k}$, d'où une contradiction puisque le balayage est chaotique. Donc $x \in F$. $\square$

Remarque. – Les conditions (i) et (ii) ont été utilisées respectivement dans [6] et [8] pour démontrer la convergence forte des itérées d'une contraction.

COROLLAIRE 3. – *Toute suite définie par* (2) *avec balayage chaotique converge fortement vers un élément de F si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $(T_i)_{i \in I}$ *est une famille de projections sur des convexes fermés tels que* $\mathring{F} \neq \varnothing$ *et* (c) *est remplacée par* $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant L_n$ [7] *;*

(ii) $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\operatorname{card} I < +\infty$, *et* (c) *est remplacée par* $\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant 2 - \varepsilon$ [1].

Un problème voisin de (P) est de trouver la meilleure approximation dans F d'un point x_0. Désignons par P_F la projection sur F et définissons une contraction $T = \sum_{i \in I} w_i T_i$, où $(w_i)_{i \in I} \subset]0, 1]$ et $\sum_{i \in I} w_i = 1$ [T est bien définie car, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $f = P_F x$ dans (5) donne $(\forall i \in I)$ $\|T_i x\| \leqslant \|x\| + d(x, F)$ et quelque soit l'ordre sur I on vérifie aisément que les sommes partielles associées à Tx forment une suite de Cauchy pour la topologie forte de $\mathcal{H}$]. Observons qu'en vertu de (5) l'ensemble des points fixes de T coïncide avec F. Un théorème de [11] conduit alors immédiatement au résultat suivant, que l'on comparera à ceux de [5].

THÉORÈME 3. – *Soit* $(w_i)_{i \in I} \subset]0, 1]$ *une famille telle que* $\sum_{i \in I} w_i = 1$ *et soit* $(\alpha_n)_{n \geqslant 0} \subset]0, 1]$ *une suite telle que* $\alpha_n \overset{n}{\to} 0$, $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n = +\infty$, *et* $\sum_{n \geqslant 0} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ [*par exemple*

$\alpha_n = 1/(n+1)]$. *Alors pour tout* $x_0 \in \mathcal{H}$ *les itérations* $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n)\sum_{i\in I} w_i T_i x_n$ *convergent fortement vers* $P_F x_0$.

La recherche de M. Combettes est subventionnée par le contrat MIP-9308609 de la National Science Foundation.

Note remise le 16 novembre 1994, acceptée le 10 mars 1995.

Références

[1] H. H. Bauschke et J. M. Borwein, On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.* (à paraître).

[2] F. E. Browder, Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces, *Math. Z.,* 100, 1967, p. 201-225.

[3] P. L. Combettes et H. Puh, Iterations of parallel convex projections in Hilbert spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.,* 15, 1994, p. 225-243.

[4] P. L. Combettes et H. Puh, A fast parallel projection algorithm for set theoretic image recovery, *Actes Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing (Adelaide, Australie),* 5, 1994, p. 473-476.

[5] P.-L. Lions, Approximation de points fixes de contractions, *C. R. Acad. Sci. Paris,* 284, série A, 1977, p. 1357-1359.

[6] J. J. Moreau, Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien, *C. R. Acad. Sci. Paris,* 286, série A, 1978, p. 143-144.

[7] N. Ottavy, Strong convergence of projection-like methods in Hilbert spaces, *J. Optim. Theory Appl.,* 56, 1988, p. 433-461.

[8] W. V. Petryshyn, Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.,* 14, 1966, p. 276-284.

[9] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM J. Control Optim.,* 14, 1976, p. 877-898.

[10] P. Tseng, On the convergence of products of firmly nonexpansive mappings, *SIAM J. Optim.,* 2, 1992, p. 425-434.

[11] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.,* 58, 1992, p. 486-491.

Department of Electrical Engineering, City College and Graduate School,
City University of New York, New York, NY 10031, USA.
plc@ee-mail.engr.ccny.cuny.edu