
MODELES ET ALGORITHMES EN VUE DE LA RESTAURATION**NUMERIQUE D'IMAGES RAYONS X****Patrick L. Combettes et H. Joel Trussell****Dept. of Electrical & Computer Engineering North Carolina State University Box 7911. Raleigh, NC 27695. USA**

RESUME

La restauration numérique d'images rayons X constitue une tâche délicate car celles-ci ont subi plusieurs dégradations de nature stochastique. De telles images sont contaminées par un bruit de Poisson et souffrent en outre des dégradations causées par l'écran fluorescent, à savoir l'amplification stochastique des quanta rayons X et la dispersion aléatoire du flux de photons qui en résulte. L'objet de cet article est d'établir les fondations théoriques en vue de la mise en oeuvre de méthodes de restauration qui prennent en compte de manière explicite le caractère stochastique de ces dégradations.

Tout d'abord, un modèle décrivant la formation d'images rayons X et les dégradations stochastiques dont elles font l'objet sera fournis. Dans un second temps, des algorithmes de restauration seront développés sur la base de critères conventionnels (maximum de vraisemblance, entropie maximale), mais aussi en employant la technique plus récente des projection sur des ensembles convexes (PSEC). Des ensembles convexes peuvent être associés à diverses propriétés du système et sont utilisés pour trouver une solution admissible (statistiques de l'image résiduelle, positivité, entropie minimale).

SUMMARY

The digital restoration of x-ray images is a complex task because such images are degraded by several stochastic processes. Namely, they have been corrupted by Poisson noise and blurred by the screen/film system due to the stochastic amplification of the x-ray quanta and the random scattering of the subsequent photon flux. The purpose of the paper is to lay the theoretical foundation for the practical implementation of restoration methods which can explicitly take into account the stochastic nature of these degradations.

First, a model for the x-ray image formation and the stochastic degradations will be provided. Secondly, restoration algorithms will be developed on the basis of standard criteria (maximum likelihood, maximum entropy) and also through the use of a more recent restoration technique, the projections onto convex sets (POCS). Convex sets can be associated with various properties of the system and are used to find a feasible solution (statistics of the residual image, nonnegativity, minimum entropy).

INTRODUCTION

La plupart des algorithmes de restauration numérique de l'image reposent sur l'hypothèse que l'opérateur responsable de la dégradation est déterministe et qu'il est ou bien connu a priori ou parfaitement mesurable a posteriori. Cependant, les dégradations que subit une image sont fréquemment de nature stochastique et leur restauration nécessite un traitement propre. De telles dégradations sont décrites et modélisées dans [1]: imagerie en milieu turbulent, imagerie rayons X, perturbations causées par le mouvement aléatoire de la scène par rapport au support d'enregistrement, etc... L'objet de cette communication est de développer des algorithmes de restauration pour les images rayons X en fonction de divers critères mathématiques.

Dans un premier temps, nous nous livrerons à une analyse du processus de formation de l'image afin d'en établir un modèle statistique. Notre étude sera restreinte au domaine de la radiologie médicale et en particulier aux radiographies obtenues à l'aide d'un système écran intensificateur/film. De telles images souffrent de plusieurs dégradations à caractère stochastique: tout d'abord, de part sa nature quantique à faible niveau, la source émettrice de rayons X génère un bruit poissonnien qui va se propager dans la chaîne optique. Ensuite, le flux de rayons X est partiellement absorbé et dispersé par les tissus, principalement en raison de l'effet Compton. Une partie des quanta X dispersés au niveau du corps inspecté atteint l'écran fluorescent, ce qui se traduit par une addition de bruit et une perte de contraste. Toutefois, la plupart des systèmes sont munis de structures [3] qui absorbent les quanta dont l'incidence n'est pas normale à la surface de l'écran et nous négligerons donc cet effet. Une sévère détérioration de l'image a lieu au niveau de l'écran lui-même, suite au phénomène de reconversion de l'énergie des rayons X en photons de lumière visible: amplification stochastique des quanta X et dispersion aléatoire du flux de photons visibles qui en résulte.

Nous adopterons les notations conventionnelles utilisées en traitement numérique de l'image [2], et supposerons que les images que nous traitons ont N pixels et qu'elles sont par conséquent représentées par des vecteurs à N composantes.

MODELISATION

Aux faibles niveaux d'émission utilisés en radiographie médicale, une source de rayons X peut être modélisée par un processus de Poisson ponctuel et uniforme. Ce modèle simplifié est dicté par la nature quantique du rayonnement et la loi des événements rares (un événement correspond à l'émission d'un quantum X). Dans la suite de notre discussion, nous supposerons que l'intervalle d'observation, à savoir le temps pendant lequel le patient est exposé au rayonnement, est normalisé à une valeur unité. Ainsi, si ρ représente le nombre moyen de quanta générés, la probabilité d'observer k photons dans le même intervalle de temps est donnée par:

$$P\{k\} = \frac{e^{-\rho} \rho^k}{k!} \quad (1)$$

Soit ΔS une surface élémentaire parallèle au plan de la source et η le nombre de quanta X traversant ΔS pendant le temps d'observation. Supposons à présent que ΔS est en fait la surface d'un pixel. Dans ces conditions, η représente la valeur de l'image numérique de la source pour ce pixel. La quantité η est dénombrable mais incertaine. Cette incertitude est à l'origine du bruit poissonnien qui cause l'aspect granuleux des images rayons X. Il est clair que ce bruit est une variable aléatoire qui dépend de la valeur du signal en chaque point de l'espace: η étant une variable de Poisson de paramètre ρ , le bruit poissonnien est la variable aléatoire de moyenne nulle et de variance ρ qui représente les variations de η autour de ρ .

Considérons l'image originale représentée par le vecteur \underline{a} , c'est à dire l'image formée à la sortie du corps: la valeur du i -ème pixel est le nombre de quanta a_i détectés en ce point. Le processus de formation de l'image dépend de l'atténuation relative que subit le flux de rayons X lorsqu'il traverse les tissus. La probabilité p_i qu'un quantum X traverse le tissu dépend de l'épaisseur du tissu et de son coefficient d'atténuation [4]. Ainsi, la probabilité que a_i quanta traversent le corps inspecté à l'endroit du i -ème pixel, sachant que k_i quanta sont présents à l'entrée est donnée par une loi binomiale de paramètre p_i :

$$P\{a_i | k_i\} = C_{k_i}^{a_i} p_i^{a_i} (1-p_i)^{k_i - a_i} \quad (2)$$

Il est aisé de montrer [5] que l'on obtient un processus de Poisson de paramètre $\lambda_i = \rho p_i$, et que la probabilité d'observer a_i quanta en sortie est:

$$P\{a_i\} = \sum_{k_i=a_i}^{+\infty} P\{a_i | k_i\} P\{k_i\} = \frac{e^{-\lambda_i} (\lambda_i)^{a_i}}{a_i!} \quad (3)$$

Nous supposerons que les composantes du vecteur \underline{a} sont statistiquement indépendantes. Notons que la seule dégradation dont souffre l'image \underline{a} ainsi obtenue est le bruit poissonnien. Cette image est ensuite appliquée à l'écran: pour chaque quantum X qui pénètre le phosphore, un nombre aléatoire de photons est créé, et ces photons sont diffusés de manière quasi-isotropique. Si \underline{e} représente l'image "amplifiée", et κ le coefficient d'amplification moyen, alors la probabilité de compter e_i photons au i -ème pixel suit une loi de Poisson de paramètre $\nu_i = \kappa \lambda_i$. Soit \underline{b} le vecteur associé à l'image observée à la sortie de l'écran et b_i le nombre total de photons en un pixel donné. Soit $b_i^{(j)}$ le nombre de photons qui proviennent du j -ème pixel de l'image \underline{e} et qui ont été diffusés à un angle tel qu'ils atterrissent sur le i -ème pixel de \underline{b} , et h_{ij} le paramètre de la loi binomiale décrivant cet événement. En écrivant une relation similaire à (3), il est aisé de montrer que $b_i^{(j)}$ suit une loi de Poisson de paramètre $h_{ij} \lambda_j$. Par ailleurs, les $b_i^{(j)}$ sont statistiquement indépendants ce qui nous permet de dire [5] que puisque:

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}) \quad b_i = \sum_{j=1}^N b_i^{(j)}, \quad (4)$$

alors b_i est également un processus poissonnien de paramètre τ_i avec:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} \nu_j = \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j. \quad (5)$$

**Modèles et algorithmes en vue de la restauration
numérique d'images rayons X.**

Patrick L. Combettes et H. Joel Trussell

Cette relation peut être écrite sous forme matricielle:

$$\mathbf{r} = \kappa H \Delta \quad \text{avec:} \quad H = \begin{bmatrix} h_{ij} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (6)$$

La matrice H est une caractéristique de l'écran et ses éléments représentent les probabilités de diffusion des photons dans une direction donnée. Enfin le processus de développement du film lui-même est un phénomène stochastique. Nous le négligerons cependant et considérerons donc que l'image dégradée \underline{d} qui doit être restaurée est simplement l'image \underline{h} formée à la sortie de l'écran.

Nous avons donc vu que sous l'hypothèse d'indépendance des λ_i , chaque pixel de l'image dégradée \underline{d} est donc également modélisé par un processus de Poisson dont le paramètre τ_i est une combinaison linéaire des paramètres originaux λ_i . La figure ci-dessous résume le processus de formation et de dégradation de l'image.

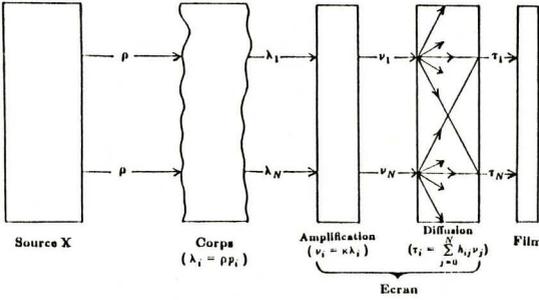


Figure 1.
Processus de Formation de l'Image.

**LA METHODE DES PROJECTIONS SUCCESSIVES
SUR DES ENSEMBLES FERMES ET CONVEXES
DANS UN ESPACE DE HILBERT (PSEC)**

Soit Ω un espace hilbertien [7] de dimension finie et $\|\cdot\|$ la norme associée à son produit scalaire. Soit C_1, \dots, C_m une collection finie de m ensembles fermés et convexes dont l'intersection C_0 est non vide. Alors C_0 est également fermé et convexe dans Ω [8]. En outre, la projection d'un vecteur \underline{x} de Ω sur C_i est l'unique vecteur $\underline{x}_p^{(i)}$ tel que:

$$\|\underline{x} - \underline{x}_p^{(i)}\| = \inf_{\underline{z} \in C_i} \left\{ \|\underline{x} - \underline{z}\| \right\} \quad (7)$$

Nous notons le vecteur projeté: $\underline{x}_p^{(i)} = P_i \underline{x}$. Considérons à présent la récurrence:

$$\underline{x}^{(k+1)} = P \underline{x}^{(k)} \quad \text{avec:} \quad P = \prod_{i=1}^m P_i \quad (8)$$

Bien que P ne soit pas en général l'opérateur de projection sur C_0 , on montre [9] que l'itération (8) converge fortement vers un élément de C_0 quel que soit le vecteur initial $\underline{x}^{(0)}$ appartenant à Ω .

Dans le cadre de notre étude, une image numérique est un vecteur de l'espace hilbertien R^N muni du produit scalaire induisant la norme euclidienne. La solution admissible d'un problème de restauration est définie comme celle qui satisfait toutes les contraintes pouvant être placées sur la solution exacte du problème [6]. Ces contraintes sont formulées sur la base de l'ensemble des connaissances a priori sur l'image originale et la dégradation. La théorie des projections successives sur des ensembles fermés et convexes dans un espace hilbertien [9] est la méthode numérique choisie pour obtenir une solution admissible. Cette méthode a été introduite en [10]. Supposons que l'on puisse construire m ensembles convexes et fermés C_i ; chacun d'eux étant associé à une propriété connue de l'image originale ou des opérateurs de dégradation qui ont produit l'image observée. Notre estimateur doit être conforme à l'ensemble de l'information connue sur le système ce qui le place dans l'intersection de ces ensembles, à savoir dans C_0 , que nous supposons non vide. Les opérateurs de projection individuels P_i peuvent être établis analytiquement en résolvant un problème d'optimisation à contrainte unique. Le projeté de Δ sur C_i est solution de:

$$\min_{\{\Delta^{(p)}\}} \left\{ \|\Delta - \Delta^{(p)}\| \right\} \quad \text{avec:} \quad \Delta^{(p)} \in C_i \quad (9)$$

En projetant séquentiellement selon (8), les itérations convergent vers un élément dans C_0 , c'est à dire vers une solution admissible. Soulignons que la solution du problème n'est pas unique et que la qualité de la restauration dépend du diamètre de C_0 . Il a été montré [6] que les contraintes relatives à l'image résiduelle pouvaient être utilisées avec succès pour déterminer la solution admissible d'un problème linéaire de la forme:

$$\underline{d} = H \underline{a} + \underline{n} \quad (10)$$

où H représente une dégradation déterministe et \underline{n} un bruit additif indépendant de l'image originale \underline{a} . Le résiduel est alors défini par:

$$\underline{r} = \underline{d} - H \hat{\underline{a}} \quad (11)$$

Les auteurs ont étendu cette méthode aux cas où H est de nature stochastique [1],[11]. La méthode PSEC permet l'incorporation d'une grande variété d'informations connues sur le système et nous nous proposons donc de l'utiliser pour notre problème. A cette fin, voyons comment l'image résiduelle peut être définie pour le modèle dont nous disposons et dans quelle mesure ses statistiques peuvent être utilisées.

**CONSTRAINTES BASEES SUR LES
STATISTIQUES DU RESIDUEL**

Notre but est d'estimer l'image originale moyenne, à savoir $\underline{\lambda}$. Soit \underline{d} l'image observée et $\hat{\underline{\lambda}}$ notre estimation de $\underline{\lambda}$. Par analogie avec (11), nous définissons l'image résiduelle moyenne par:

$$\underline{r} = \underline{d} - \kappa H \hat{\underline{\lambda}} \quad (12)$$

ALGORITHMES

Dans le cas où λ est estimée parfaitement, le résiduel est identique au bruit de Poisson qui contamine d . Nous cherchons donc à estimer $\hat{\lambda}$ de telle sorte que les statistiques du résiduel sont en accord avec celles du bruit. La différence majeure avec (10) est que, dans notre cas, le bruit dépend du signal. Selon (12), la i -ème composante du résiduel s'écrit:

$$r_i = d_i - \tau_i = d_i - \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j \quad (13)$$

Nous avons vu que le bruit poissonnien du pixel d_i est une variable aléatoire n_i telle que:

$$E\{n_i\} = 0 \quad \text{et:} \quad \text{Var}\{n_i\} = \tau_i \quad (14)$$

Par conséquent, le bruit poissonnien qui contamine d est non stationnaire. Considérons l'image d' définie comme suit:

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}) \quad d'_i = \frac{d_i - \tau_i}{\sqrt{\tau_i}} \quad (15)$$

Puisque τ_i représente à la fois la variance et la moyenne de d_i , les N variables aléatoires d'_i ont une moyenne nulle et une variance unité; cette variance est aussi celle du bruit dans d' . Le vecteur ainsi créé est donc stationnaire au sens large. Par suite, la variance de l'échantillon formé par les N composantes de d' est définie par:

$$\sigma_{d'}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d'_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - \tau_i)^2}{\tau_i} \quad (16)$$

et devrait être égale à 1 pour être en accord avec celle du bruit. De manière équivalente, cette contrainte peut s'écrire:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^2}{\kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j} + \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j \right) = \delta_d \quad (17)$$

Avec:

$$\delta_d = N + 2 \sum_{i=1}^N d_i \quad (18)$$

Une autre contrainte utile basée sur les propriétés statistiques du résiduel est celle de la déviation maximale tolérable: la valeur d'une composante quelconque r_i ne devrait pas s'éloigner de 0 de plus de β fois l'écart type du bruit. Le facteur β peut être choisi en fonction d'un intervalle de confiance. Nous obtenons N contraintes de déviation maximale par rapport à la moyenne:

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}) \quad |r_i| \leq \beta \sqrt{\tau_i} \quad (19)$$

où β est un réel strictement supérieur à 1. La distribution de Poisson n'est pas symétrique. Cependant, elle peut être approchée par une distribution normale dont la moyenne est égale à la variance si son argument est suffisamment grand. Ainsi, la borne en (19) est pratiquement symétrique.

1. Maximum de Vraisemblance:

La méthode du maximum de vraisemblance [12] consiste à trouver le vecteur $\hat{\lambda}$ qui maximise la densité:

$$p(d|\hat{\lambda}) = \prod_{i=1}^N P(d_i|\hat{\lambda}_i) \quad (20)$$

D'après (5), il vient:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\kappa} H^{-1} d \quad (21)$$

Cet estimateur est non biaisé et efficace [1]. Il est à noter que la méthode du maximum de vraisemblance aboutit à une opération de filtrage inverse. Il est bien connu que le résultat produit par cette technique est de qualité médiocre [2].

2. La Méthode PSEC:

La méthode PSEC peut être mise en oeuvre en projetant séquentiellement un choix initial (par exemple l'image dégradée ou bien une image prototype) sur les ensembles fermés et convexes suivants. Chacun d'eux correspond à une propriété connue a priori du système.

(a) Déviation maximale par rapport à la moyenne: Selon (5) et (19), l'ensemble associé avec la i -ème contrainte est:

$$C_m^{(i)} = \left\{ \hat{\lambda} \mid \left(d_i - \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j \right)^2 \leq \beta^2 \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j \right\} \quad (22)$$

Il a été montré que cet ensemble est convexe [1]. Soit $\Delta^{(p)}$ la projection de Δ sur l'ensemble $C_m^{(i)}$. D'après (9), le vecteur projeté $\Delta^{(p)}$ s'obtient en résolvant le problème d'optimisation suivant:

$$\min_{\{\Delta^{(p)}\}} \left\{ \|\Delta - \Delta^{(p)}\|^2 \right\}, \quad (23)$$

sous la contrainte:

$$\left(d_i - \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)} \right)^2 = \beta^2 \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)}. \quad (24)$$

La contrainte est introduite par la présence du multiplicateur de Lagrange μ_i et la fonctionnelle à minimiser devient:

$$\Theta(\Delta^{(p)}) = \sum_{j=1}^N (\lambda_j - \lambda_j^{(p)})^2 + \mu_i \left(d_i^2 - \kappa(2d_i + \beta^2) \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)} + \kappa^2 \left(\sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)} \right)^2 \right) \quad (25)$$

Soit k un élément quelconque de $\{1, 2, \dots, N\}$. Nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(\underline{\Delta}^{(p)})}{\partial \lambda_k^{(p)}} &= -2(\lambda_k^{(p)} - \lambda_k) \\ &- \mu_i \left[\kappa h_{ik} (2d_i + \beta^2) - 2\kappa^2 h_{ik} \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

D'où nous tirons:

$$\lambda_k^{(p)} = \lambda_k - \mu_i \kappa h_{ik} \left(d_i + \frac{\beta^2}{2} - \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)} \right) \quad (27)$$

Définissons le p -ème résiduel comme suit:

$$\underline{r}^{(p)} = \underline{d} - \kappa H \underline{\Delta}^{(p)} \quad (28)$$

Alors (27) peut être exprimée sous forme matricielle:

$$\underline{\Delta}^{(p)} = \underline{\Delta} - \mu_i \kappa (r_i^{(p)} + \frac{\beta^2}{2}) \underline{h}_i \quad (29)$$

où \underline{h}_i est la i -ème colonne de H^T .

(b) Variance du résiduel: Un ensemble C_v peut être associé à (17):

$$C_v = \left\{ \underline{\Delta} \mid \sum_{i=1}^N \left[\frac{d_i^2}{\kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j} + \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j \right] \leq \delta_d \right\} \quad (30)$$

Il est à remarquer que l'égalité (17) a été transformée en une inégalité. En effet, puisque C_v est fermé, un vecteur projeté sur C_v appartient à sa frontière [8] et satisfait donc la contrainte (17). Il a été prouvé que C_v est un ensemble convexe [1]. L'opérateur de projection est trouvé en minimisant la fonctionnelle:

$$\begin{aligned} \Theta(\underline{\Delta}^{(p)}) &= \|\underline{\Delta} - \underline{\Delta}^{(p)}\|^2 \\ &- \mu \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^2}{\kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)}} + \kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)} \right) - \delta_d \right] \end{aligned} \quad (31)$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange. La k -ème composante du vecteur projeté a pour expression [1]:

$$\lambda_k^{(p)} = \lambda_k + \frac{\mu \kappa}{2} \sum_{i=1}^N h_{ik} \left[1 - \frac{d_i^2}{(\kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j^{(p)})^2} \right] \quad (32)$$

(c) Positivité: En raison du faible niveau d'exposition, une grande partie des pixels a des valeurs proche de 0 tout en étant positives. Une contrainte de positivité est donc utile. L'opérateur de projection sur l'ensemble convexe des images positives est défini de manière très simple:

$$\lambda_k^{(p)} = \begin{cases} \lambda_k & \text{si: } \lambda_k \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (33)$$

(d) Entropie Minimale: En normalisant les composantes de $\underline{\Delta}$ de manière à ce que leur somme soit égale à 1, l'entropie de l'image s'écrit:

$$J = - \sum_{i=1}^N \lambda_i \ln(\lambda_i) = - \underline{\Delta}^T \ln\{\underline{\Delta}\} \quad (34)$$

L'entropie d'une image peut être interprétée comme une mesure de son manque de structure. S'il est connu a priori que l'image que nous cherchons à restaurer est limitée du point de vue de sa structure, une borne inférieure ζ peut être placée sur son entropie. Par suite nous construisons l'ensemble:

$$C_e = \left\{ \underline{\Delta} \mid - \sum_{i=1}^N \lambda_i \ln(\lambda_i) \geq \zeta \right\} \quad (35)$$

On peut montrer que cet ensemble est convexe. En procédant par la méthode habituelle, le vecteur projeté minimise la fonctionnelle:

$$\Theta(\underline{\Delta}^{(p)}) = \|\underline{\Delta} - \underline{\Delta}^{(p)}\|^2 - \mu \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^{(p)} \ln(\lambda_i^{(p)}) + \zeta \right) \quad (36)$$

Et il vient:

$$(\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}) \lambda_k^{(p)} = \lambda_k + \frac{\mu}{2} (\ln(\lambda_k^{(p)}) - 1) \quad (37)$$

Ce système découplé se résoud simplement par une méthode de Newton. Il est à noter que la notion d'entropie minimale est très subjective et doit être manipulée avec précaution.

3. Entropie Maximale:

Nous cherchons à maximiser l'entropie définie en (34), sous une contrainte donnée, afin d'éviter la solution triviale $\lambda_i = 1/N$. Dans ces conditions, chercher une image dont l'entropie est maximale revient à chercher l'image la plus aléatoire possible satisfaisant une certaine contrainte. Considérons encore une fois la contrainte introduite en (17) concernant la variance du résiduel. Le problème de l'entropie maximale peut donc être posé comme suit:

$$\min_{\{\underline{\Delta}\}} \left\{ \underline{\Delta}^T \ln\{\underline{\Delta}\} \right\}, \quad (38)$$

sous la contrainte:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^2}{\tau_i} + \tau_i \right) = \delta_d. \quad (39)$$

Soit μ le multiplicateur de Lagrange associé avec la contrainte. La fonction à minimiser est alors:

$$\Theta(\underline{\Delta}) = \underline{\Delta}^T \ln\{\underline{\Delta}\} - \mu \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^2}{\tau_i} + \tau_i \right) - \delta_d \right] \quad (40)$$

Modèles et algorithmes en vue de la restauration numérique d'images rayons X.

Patrick L. Combettes et H. Joel Trussell

Soit λ_k la k -ème composante du vecteur estimé. Le résultat de cette minimisation est [1]:

$$\ln(\lambda_k) = -1 + \mu \kappa \sum_{i=1}^N h_{ik} \left(1 - \frac{d_i^2}{\left(\kappa \sum_{j=1}^N h_{ij} \lambda_j \right)^2} \right) \quad (41)$$

Ce système de N équations peut être résolu par des méthodes numériques.

SIMULATION

Nous allons présenter un exemple de restauration stochastique tiré de [1], où l'opérateur de dégradation H est aléatoire et spatialement stationnaire (rappelons que la diffusion des photons est un phénomène non stationnaire). En outre sa moyenne et ses variations sont connues. Bien qu'il se rapporte à un type de dégradation stochastique différent de celui traité dans cette communication, ce problème a été abordé de manière similaire à celle que nous venons d'exposer: les variations aléatoires de la réponse impulsionnelle ont été prises en compte via la méthode PSEC (dans notre problème original, les variations aléatoires dues au bruit poissonnien ont été prises en compte). L'image originale (en haut à gauche) a été dégradée par une réponse impulsionnelle aléatoire et par addition de bruit blanc Gaussien (en haut à droite). La restauration par filtrage de Wiener réalisée avec la réponse impulsionnelle moyenne présente d'importantes distorsions (en bas à gauche). La qualité médiocre de cette restauration s'explique par le fait qu'une telle méthode ignore le caractère stochastique de la dégradation puisque les variations de la réponse impulsionnelle ne sont pas prises en compte. En revanche, grâce à sa grande souplesse, la méthode PSEC nous a permis d'inclure ces variations lors de la construction des ensembles relatifs aux statistiques du résiduel. Nous avons également utilisé le critère de positivité ainsi qu'un ensemble basé sur une contrainte de puissance maximale [13]; cette dernière étant suggérée par la répartition de l'énergie dans l'image originale.

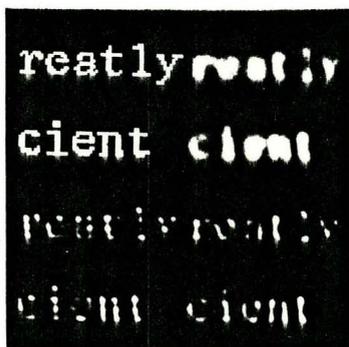


Figure 2. Exemple de Restauration.
Originale - Dégradée
Restaurée (Wiener) - Restaurée (PSEC)

CONCLUSIONS

Nous avons présenté différents algorithmes pour la restauration d'images rayons X. Ces algorithmes reposent sur un modèle de formation de l'image qui prend en compte le bruit de Poisson et son caractère non stationnaire. La méthode PSEC est celle qui nous paraît être la plus prometteuse en raison de la grande quantité d'information qu'elle nous a permis d'incorporer à l'algorithme. Nous avons considéré, de manière non exhaustive, plusieurs ensembles: contraintes imposées sur les statistiques du résiduel (variance, déviation maximale de la moyenne), positivité, entropie minimale. Dans la plupart des cas, la projection sur un ensemble se réduit à une équation transcendante, qui doit être résolue numériquement. L'amplification produite par l'écran a été modélisée par un coefficient déterministe κ . En réalité, κ est une variable aléatoire. En supposant que sa variance est connue, l'amplification peut être prise en compte dynamiquement en incluant un terme supplémentaire dans le calcul des bornes des ensembles convexes, selon la technique développée en [11].

REFERENCES

- [1] Combettes, Patrick L. : "Models and Algorithms for the Digital Restoration of Stochastically Degraded Images". Master's Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, North Carolina State University. Raleigh, Janvier 1987.
- [2] Andrews, H. C. and Hunt, B. R. : "Digital Image Restoration". Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- [3] Curry, T. S., Dowdy J. E. and Murry R. C. : "Christensen's Introduction to the Physics of Diagnostic Radiology", third edition. Lea & Febiger. Philadelphia, 1984.
- [4] Macovski, A. : "Medical Imaging". Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ. 1983.
- [5] Parzen, E. : "Stochastic Processes". Holden-Day, Inc. San Francisco, 1962.
- [6] Trussell, H. Joel et Civanlar, M. Reha : "The Feasible Solution in Signal Restoration". IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-32, no. 2, pp 201-212. Avril 1984.
- [7] Bourbaki, N. : "Eléments de Mathématique - Livre V: Espaces Vectoriels Topologiques". Hermann. Paris, 1964.
- [8] Garsoux, J. : "Analyse Mathématique". Dunod. Paris, 1968.
- [9] Bregman, L. M. : "Recherche d'un Point Commun à des Ensembles Convexes par la Méthode des Projections Successives". Doklady Akademii nauk URSS, vol. 162, no. 3, pp 487-490. 1965.
- [10] Youla, D. C. et Webb, H. : "Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part 1 - Theory". IEEE Trans. on Medical Imaging, vol. MI-1, no. 2, pp 81-94. Octobre 1982.
- [11] Trussell, H. Joel et Combettes Patrick L. : "Considerations for the Restoration of Stochastic Degradations". Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Dallas, 6-9 Avril 1987.
- [12] Cramér, H. : "Mathematical Methods of Statistics". Princeton University Press. Princeton, NJ, 1946.
- [13] Trussell, H. Joel : "Maximum Power Signal Restoration". IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-29, no. 5, pp 1059-1061. Octobre 1981.