Convexité et Signal

Patrick L. Combettes

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
75005 Paris, France

Mots clefs : Convexité, projection, théorie du signal, estimation, traitement de l'image

English summary : The central role played by convexity in applied disciplines such as mechanics or economics is well acknowledged. In this paper we provide a brief overview of its importance in signal theory and its applications. The first part focuses on signal estimation and synthesis problems and the second part on signal decomposition and analysis problems.

1 Introduction

L'analyse convexe moderne [35, 42] a entretenu au cours de son développement des liens très privilégiés avec certaines disciplines appliquées, au premier rang desquelles figure la mécanique. Ainsi, ce sont des questions de mécanique ont été à l'origine de nombreux travaux fondamentaux de Jean-Jacques Moreau. L'importance de la convexité en économie, en théorie de l'information et, par le biais de l'optimisation, dans de nombreux autres domaines est également bien établie, cf. [2, 4, 21, 22, 23, 36, 50].

L'objectif de cet article est de donner un aperçu de quelques aspects du rôle que joue la convexité dans une discipline à laquelle elle n'est pas traditionnellement associée, à savoir la théorie du signal. La première partie est consacrée aux problèmes d'estimation et de synthèse et la deuxième aux problèmes de décomposition et d'analyse.

Par «signal» nous entendons de manière générale la représentation mathématique de l'observation d'une grandeur mesurable (grandeur physique, économique, biologique ou autre) évoluant en fonction d'une ou plusieurs variables (temps, espace, longueur d'onde, température, tension électrique, etc.). De manière plus directe, un signal est donc un objet abstrait qui sert de support à l'information. La théorie du signal a pour objet 1º la modélisation fonctionnelle des signaux et de leurs propriétés 2º la modélisation opérationnelle de leurs transformations 3º l'étude des systèmes qui les génèrent. Elle constitue le fondement théorique du traitement du signal, qui désigne l'ensemble des opérations que l'on effectue en vue de la transmission, du stockage et de l'analyse des signaux. Le traitement du signal est un maillon indispensable dans les technologies de l'information au sens large, de l'archivage numérique de données à l'imagerie médicale, en passant par le contrôle non-destructif et les télécommunications.

Dans toute la suite l'espace des signaux sous-jacent sera un espace fonctionnel hilbertien réel $\mathcal{H}$, de produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ induisant une norme $\| \cdot \|$ et une distance d. Typiquement, $\mathcal{H}$ prendra la forme d'un s.e.v. de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, où $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré convenable.

2 Estimation et synthèse de signaux

Dans cette première partie, nous nous intéressons aux problèmes d'estimation et de synthèse. La première catégorie regroupe plusieurs types de problèmes «inverses» où l'on doit reconstituer la forme originelle d'un signal à partir d'informations a priori et d'observations de signaux liés au signal original par un modèle (partiellement) connu. Elle comprend en particulier les problèmes de débruitage, de déconvolution, de restauration, de reconstruction, d'interpolation et d'extrapolation. La seconde catégorie regroupe des problèmes de type «direct» où il s'agit de produire un signal à partir de spécifications imposées. Les problèmes de codage, de compression, de construction d'images ou de champs de rayonnement d'antennes, de conception de filtres, d'ondelettes, de distributions temps-fréquence ou de signaux impulsionnels, rentrent dans cette catégorie.

2.1 L'approche ensembliste

Depuis l'après-guerre, la notion d'optimalité a pris une place prépondérante dans la culture scientifique. Cet engouement pour les solutions optimales dans les problèmes d'estimation et de synthèse a pu prospérer grâce aux progrès accomplis d'une part dans certaines disciplines théoriques (analyse non linéaire, optimisation, recherche opérationnelle, statistique) et d'autre part dans la technologie des calculateurs. D'un point de vue scientifique, ses fondements peuvent parfois paraître quelque peu arbitraires, la principale ligne de conduite étant de produire un objet qui minimise un coût préétabli selon des critères relevant souvent plus de considérations numériques que d'un réel souci de tenir compte des spécificités du problème traité. Des critiques en ce sens furent émises dès 1958 par Zadeh [53], qui s'interrogeait sur le bien-fondé de la formulation systématique des problèmes de décision dans le cadre de l'optimisation. Ainsi, la plupart des méthodes classiques de restauration d'image produisent des solutions «optimales» (au sens des moindres carrés, du maximum de vraisemblance, du maximum d'entropie, du maximum a posteriori, etc. [1]) tout en violant des contraintes élémentaires telles que la positivité et, plus généralement, au détriment des connaissances a priori.

Dès les années soixante, on trouve dans la littérature des sciences de l'ingénieur plusieurs exemples de problèmes formulés sur la base d'un critère d'admissibilité plutôt que d'optimalité en ce sens qu'une solution est dite acceptable si elle satisfait à toutes les contraintes disponibles [14]. Ces contraintes proviennent des données observées et des connaissances a priori dans les problèmes d'estimation et du cahier des charges dans les problèmes de synthèse. En désignant par S_i le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ des signaux conformes à la i^{e}contrainte, le problème d'admissibilité se met sous la forme

$$\text{Trouver } x \in S = \bigcap_{i \in I} S_i, \tag{1}$$

d'où le terme «approche ensembliste» pour désigner ce type de formulation. Ainsi, dans le cas d'un problème d'estimation ensembliste, est solution tout signal $x \in \mathcal{H}$ qui, à la lumière des connaissances a priori, a pu engendrer les données observées. Le principal atout de l'approche ensembliste est d'offrir une grande flexibilité quant à l'incorporation des contraintes, qu'elles soient déterministes ou statistiques. En outre, les solutions ainsi obtenues possèdent par définition des propriétés bien définies et tangibles qui sont souvent plus précieuses que l'optimalité par rapport à un critère conventionnel. Il convient de noter qu'il n'y a de véritable conflit entre une procédure optimale traditionnelle et une procédure ensembliste que dans le cas où la solution de la première n'est pas acceptable au sens de la seconde, c'est-à-dire quand elle n'est pas en accord avec les contraintes connues sur le problème.

Depuis le milieu des années quatre-vingt, on assiste à un foisonnement des applications des méthodes ensemblistes dans virtuellement toutes les branches du traitement du signal. On trouvera une bibliographies couvrant la période 1968-1993 dans [14] avec une mise à jour en 1996 dans [15]. Pour des travaux plus récents, on consultera [12, 13, 19, 40, 41, 45, 47].

Il va de soi que l'approche ensembliste n'a de portée pratique qu'accompagnée d'algorithmes implantables et fiables pour résoudre (1). A cet égard, nous allons voir que c'est à la convexité qu'elle doit son succès.

2.2 L'extrapolation selon Gerchberg et Papoulis

Un problème fondamental motivé par des problèmes pratiques qui se posent notamment en astronomie, en tomographie et en cristallographie est de reconstruire un signal à partir d'informations partielles le décrivant dans les domaines spatial et spectral. En l'absence d'informations supplémentaires, une approche naturelle pour résoudre ce problème est de modifier itérativement un signal initial x_0 en lui imposant en alternance les informations connues dans les deux domaines. A titre d'exemple, considérons le problème de l'extrapolation d'un signal $x \in L^2(\mathbb{R})$ connu sur un intervalle $A = [-a, a]$ et à bande limitée, disons $\operatorname{supp} \widehat{x} \subset B = [-b/2, b/2]$, où $\widehat{x}$ désigne la transformée de Fourier de x. Notons 1_A la fonction caractéristique de A et posons $x_0 = x 1_A$. Dans ce cas, la méthode de substitution alternée conduit à l'algorithme suivant, proposé par Papoulis [39] en 1975

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = x_0 + \big(b \operatorname{sinc}(b\,\cdot) \star x_n\big) 1_{\complement A}, \tag{2}$$

où $\star$ dénote la convolution. Un an plus tôt, Gerchberg [25] s'était intéressé dans le cadre de l'optique à diffraction limitée au problème «dual» de l'extrapolation d'une image à support borné dont une portion de la diffractée (transformée de Fourier) a été observée. L'algorithme d'extrapolation proposé était essentiellement le même que (2) à la différence que les domaines spatial et spectral sont intervertis. Une généralisation de ce formalisme du point de vue des espaces à noyau reproduisant est donnée dans [24].

2.3 La formalisation de Youla et l'algorithme de Von Neumann

Dans son article classique [51], Youla observa en 1978 que de nombreux problèmes de restauration de signaux admettent une formulation géométrique simple : il s'agit de trouver dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ un signal x appartenant à un s.e.v. fermé M connaissant sa projection $P_N x$ sur un s.e.v. fermé N. La solution est unique si et seulement si $M \cap N = \{0\}$ et, plus généralement, on obtient la solution la plus proche de $x_0 = P_N x$ en tant que limite forte de la suite construite par les itérations

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = x_0 + (\mathrm{Id} - P_N) \circ P_M \, x_n. \tag{3}$$

Cette formalisation s'inscrit dans le cadre défini par (1) puisque l'objectif est de produire un point dans $S = S_1 \cap S_2$, où $S_1 = x_0 + N^\perp$ et $S_2 = M$. Par ailleurs, si l'on dénote par P_i le projecteur relatif à S_i, l'algorithme (3) se met sous la forme de l'algorithme des projections alternées de Von Neumann

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = P_1 \circ P_2 \, x_n, \tag{4}$$

qui converge fortement vers la projection de x_0 sur S. En particulier, on retrouve la méthode d'extrapolation de Gerchberg-Papoulis (2) en posant $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ et

$$M = \big\{ z \in L^2(\mathbb{R}) \mid \widehat{z} 1_{\complement B} = 0 \big\}, \;\; N = \big\{ z \in L^2(\mathbb{R}) \mid z 1_{\complement A} = 0 \big\}, \;\; \text{et} \;\; x_0 = P_N x. \tag{5}$$

On peut en fait étendre ce formalisme à m contraintes affines grâce à une extension théorème de Von Neumann due à Halperin (cf. [6, 14, 15]) : si $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont des sous-espaces affines fermés d'intersection S non vide, la suite construite par les itérations

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = P_{\mathrm{i}(n)} x_n, \quad \text{où} \quad \mathrm{i}(n) = n \,(\text{modulo } m) + 1, \tag{6}$$

converge fortement vers la projection de x_0 sur S.

2.4 Le rôle de la convexité

Bien que le formalisme décrit dans la section précédente soit fort utile pour modéliser et résoudre divers types de problèmes, il est limité aux contraintes affines. Or on déborde largement de ce cadre dans les applications. Il suffit pour s'en convaincre de considérer quelques contraintes élémentaires : positivité, bornes ponctuelles sur l'amplitude, borne supérieure sur l'énergie dans une bande de fréquences donnée, borne supérieure sur la distance à des signaux de référence, borne inférieure sur l'entropie, etc. [13, 14, 15, 46, 48, 52]. Il s'agit là de contraintes non-affines mais convexes ! Reste à surmonter l'obstacle numérique : sait-on résoudre (1) dans le cas de m convexes fermés ?

Il est clair que les projecteurs affine possèdent des propriétés bien plus fortes que celles des projecteurs convexes : les premiers sont caractérisés par une équation variationnelle et les seconds seulement par une inéquation variationnelle. Comme le montre Bregman en 1965, ces propriétés suffisent néanmoins à garantir la convergence faible de toute suite générée par (6) vers un élément de S si celui-ci est non vide [11]. Toutefois, il semble que ce résultat ne se soit propagé que très lentement puisque ce n'est qu'au début des années quatre-vingt qu'il a finalement atteint la communauté du signal. Youla le diffusa par le biais de son article [52] et l'algorithme (6) fut baptisé «POCS» (Projections Onto Convex Sets). Ce travail eu un retentissement immédiat et fut le point de départ d'une intense activité [14, 15, 46, 47].

L'approche ensembliste a connu un essor remarquable au cours de la période 1982-1995 en se reposant presque exclusivement sur la méthode POCS. Cet algorithme présente cependant plusieurs inconvénients :

- Il diverge ou donne des solutions très médiocres lorsque les contraintes sont incompatibles.
- Sa convergence peut être arbitrairement lente.
- Il ne peut traiter qu'une seule contrainte par itération. Il n'est donc pas aisé de le mettre en œuvre sur une architecture à processeurs parallèles.
- Il n'est applicable qu'à un nombre fini de contraintes.
- Il nécessite le calcul de projections exactes. Ces problèmes auxiliaires sont souvent coûteux numériquement.

Il était donc important de concevoir des algorithmes plus performants, à même de s'affranchir des limitations constatées ci-dessus. Un pas important dans cette direction fut accompli collectivement il y a quelques années (1995-1999) par plusieurs chercheurs en utilisant des notions d'analyse convexe plus sophistiquées que celles sur lesquelles repose POCS [6, 16, 17, 19, 26]. On trouvera les derniers développements et l'état de l'art dans [5] and [18]. Soulignons que ce regain d'activité sur les problèmes d'admissibilité convexe a été motivé en grande partie par les applications au traitement du signal et de l'image.

Il n'est pas possible de décrire en détail ces développement ici et nous nous contenterons donc de donner la forme de l'algorithme le plus général. Celui-ci est décrit par les itérations [18]

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = x_n + \lambda_n \left(\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} \big(T_{i,n} x_n + e_{i,n}\big) - x_n \right), \tag{7}$$

où I_n est un sous-ensemble fini de I (ce dernier étant dénombrable), $(\omega_{i,n})_{i \in I_n}$ un système de poids positifs tels que $\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} = 1$, $T_{i,n}$ un opérateur dont l'ensemble des points fixes est S_i, $e_{i,n}$ une tolérance numérique sur le calcul de $T_{i,n} x_n$ et λ_n un paramètre de relaxation à valeur dans $]0, 2L_n[$, où $L_n \geq 1$ dépend de $(\omega_{i,n})_{i \in I_n}$, $(T_{i,n})_{i \in I_n}$ et x_n. On retrouve la configuration de l'algorithme POCS (6) pour $I_n = \{n \text{ (modulo } m) + 1\}$ (d'où $\omega_{i,n} = 1$), $T_{i,n} = P_i$, $e_{i,n} = 0$ et $\lambda_n = 1$.

2.5 Convergence faible versus convergence forte

En règle générale, en passant des problèmes affines (Section 2.3 – «le monde des égalités») aux problèmes convexes (Section 2.4 – «le monde des inégalités»), on constate une détérioration de la qualité de la convergence : convergence forte (vers la projection sur l'ensemble des signaux admissibles S du point initial x_0) versus convergence faible (vers un signal non spécifié dans S). Cette détérioration n'est pas anodine puisque nombre de problèmes se posent naturellement en dimension infinie. En traitement optique du signal, il n'y a pas de discrétisation et les calculs se font directement dans le domaine analogique par le biais de divers montages optiques [25, 49]. Dans ce contexte, la convergence forte d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vers un signal x traduit une propriété physique fondamentale : l'énergie des erreurs $(\|x_n - x\|^2)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Par contre, du même point de vue énergétique, une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ peut converger faiblement vers un signal x sans que les itérations apportent la moindre amélioration puisque la suite des énergies résiduelles $(\|x_n - x\|^2)_{n\geq 0}$ peut être constante. Notons aussi que la convergence forte demeure pertinente quand les signaux sont discrétisés sur un support borné et transposés en dimension finie dans $\mathbb{R}^N$ en vue d'un traitement sur ordinateur conventionnel. En effet, la convergence forte du schéma en dimension infinie est souvent garante d'un meilleur comportement numérique lorsqu'il est implanté en dimension finie [8].

Sous certaines hypothèses de régularité des contraintes, la convergence (a priori faible) de (7) peut en fait être forte [6, 17, 18, 26]. Cependant ces conditions ne sont remplies que dans des cas très particuliers. On peut cependant contourner cette difficulté : il a été montré dans [8] qu'une modification mineure de (7) où $e_{i,n} \equiv 0$ produit un algorithme fortement convergent (vers la projection sur S du point initial x_0) sans qu'aucune hypothèse supplémentaire ne soit requise. Ceci permet de travailler avec des contraintes convexes tout en obtenant la même qualité de convergence que dans le cas affine. Nous renvoyons le lecteur à [8, 18] pour les détails.

2.6 De l'admissibilité à l'optimalité

Dans l'approche ensembliste tout signal admissible est une solution acceptable. Dans certains problèmes il peut être souhaitable de sélectionner un signal admissible qui minimise une certaine fonction convexe s.c.i $f\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$. Par exemple, dans l'espace des signaux analogiques $\mathcal{H} = \mathrm{H}^1(\Omega)$ définis sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^M$, la fonction

$$f\colon x \mapsto \int_\Omega \varphi\big(t, x(t), \nabla x(t)\big)\, dt, \tag{8}$$

regroupe plusieurs critères de sélection usuels (quadratiques, entropiques, informationnels, fishériens, etc). Le problème est alors de

$$\text{Trouver } x \in S = \bigcap_{i\in I} S_i \text{ tel que } f(x) = \inf f(S). \tag{9}$$

Cette situation se présente notamment quand l'ensemble des solutions admissibles est de la forme $S' = S \cap \big\{z \in \mathcal{H} \mid f(z) \leq \eta\big\}$, où la valeur de η est incertaine (η peut par exemple être issu de mesures bruitées, de connaissances a priori imprécises, etc.). Dans ce cas on obtiendra un signal dans S' en minimisant f sur S. Dans d'autres cas, le choix de f sera guidé par des considérations plus subjectives.

Un outil très puissant en optimisation convexe est le principe de dualité qui associe au problème «primal» (9) un problème de maximisation «dual» qui lui est équivalent sous certaines conditions [4, 22, 43]. Ce principe est d'un intérêt pratique immédiat lorsque l'on peut aisément obtenir des solutions duales et ensuite remonter aux solutions primales. On en trouvera des applications en restauration et en reconstruction de signaux dans [3, 10, 27, 28, 38].

2.7 Distances de Bregman

Soit $f\colon \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et différentiable au sens de Gâteaux sur l'intérieur de son domaine $\mathcal{D}$. Alors la «distance» de Bregman associée à f est définie par

$$D\colon \mathcal{H}^2 \to [0, +\infty] : (x, y) \mapsto \begin{cases} f(x) - f(y) - \langle x - y \mid \nabla f(y) \rangle & \text{si } y \in \operatorname{int} \mathcal{D} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

La quantité $D(x, y)$ est une mesure de la dissemblance entre deux objets x et y contrôlée par la fonction f. Par exemple, si $f = \|\cdot\|^2/2$, on retrouve la notion métrique usuelle $D(x, y) = \|x - y\|^2/2$; dans $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$, si f est la négentropie de Shannon, i.e., avec la convention $0 \cdot \ln 0 = 0$,

$$f\colon x = \big(x^{(i)}\big)_{1 \le i \le N} \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^N x^{(i)} \ln x^{(i)} & \text{si } \min_{1 \le i \le N} x^{(i)} \ge 0 \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \tag{11}$$

alors on obtient la divergence de Kullback-Leibler entre x et y,

$$D(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N x^{(i)} \ln\big(x^{(i)}/y^{(i)}\big) - \sum_{i=1}^N x^{(i)} + \sum_{i=1}^N y^{(i)} & \text{si } \begin{cases} \min_{1 \le i \le N} x^{(i)} \ge 0 \\ \min_{1 \le i \le N} y^{(i)} > 0, \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

On peut définir plusieurs opérateurs à partir des distances de Bregman et étendre ainsi des algorithmes initialement conçus pour la distance usuelle [7, 13]. Cette approche s'est avérée très utile à la modélisation et à la résolution de certains problèmes de traitement du signal [13]. Ainsi, une projection de Bregman de $y \in \operatorname{int} \mathcal{D}$ sur un convexe fermé $S_i \subset \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{D} \cap S_i \neq \emptyset$ est un point $x \in \mathcal{D} \cap S_i$ tel que $D(x, y) = \inf D(S_i, y) < +\infty$. Il est également possible de définir une projection rétrograde en inversant l'ordre des variables x et y. Avec de telles projections on peut par exemple mettre l'algorithme EM (expectation-maximization) sous la forme (4) [9].

3 Décomposition et analyse de signaux

Un des concepts les plus fondamentaux en théorie du signal est celui de décomposition d'un signal x sous la forme

$$x = x^{\oplus} + x^{\ominus}, \tag{13}$$

où $x^{\oplus}$ possède une certaine propriété et le signal résiduel $x^{\ominus}$ possède la propriété duale. Le choix de la décomposition ainsi que l'interprétation et l'utilisation des composantes $x^{\oplus}$ et $x^{\ominus}$ dépendent de l'application, e.g., modélisation, détection, classification, filtrage inverse, compression, etc.

3.1 Décomposition suivant deux sous-espaces orthogonaux

L'outil classique de décomposition linéaire d'un signal est le projecteur relatif à un s.e.v. fermé M, qui donne $x^{\oplus} = P_M x$ et $x^{\ominus} = P_{M^\perp} x$ dans (13). Par exemple la décomposition d'un signal $x \in L^2$ en une composante basses-fréquences $x^{\oplus}$ et une composante hautes-fréquences $x^{\ominus}$ s'obtient en utilisant le s.e.v. M défini dans (5). Notons aussi que les analyses en ondelettes [29, 30] sont basées sur de telles décompositions. Ce type de décomposition linéaire contrôlée par un s.e.v. a une portée limitée en théorie du signal. Dans la section suivante, nous l'étendons à des décompositions non-linéaires contrôlées par des opérateurs monotones.

3.2 Autour du principe de décomposition de Moreau

Soit $A\colon \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ un opérateur multivoque et A^{-1} son inverse. On rappelle que, pour un paramètre $\gamma > 0$, $J_\gamma^A = (\mathrm{Id} + \gamma A)^{-1}$ est la résolvante de A et $A_\gamma = (\mathrm{Id} - J_\gamma^A)/\gamma$ son approximation de Yosida. Comme point de départ, observons que cette approximation peut se mettre sous la forme

$$A_\gamma = J_{1/\gamma}^{A^{-1}} \circ (\mathrm{Id}/\gamma). \tag{14}$$

Supposons à présent que A (et donc A^{-1}) soit maximal monotone. Alors, par le théorème de Minty, les résolvantes J_γ^A et $J_{1/\gamma}^{A^{-1}}$ sont monovoques et définies sur tout $\mathcal{H}$. Au vu de (14), on en déduit que tout $x \in \mathcal{H}$ s'écrit

$$x = x^{\oplus} + x^{\ominus}, \quad \text{où} \quad x^{\oplus} = J_\gamma^A x \ \text{ et } \ x^{\ominus} = \gamma J_{1/\gamma}^{A^{-1}}(x/\gamma). \tag{15}$$

Nous obtenons ainsi une technique versatile de décomposition non-linéaire d'un signal contrôlée par un opérateur multivoque maximal monotone.
Prenons par exemple une fonction convexe propre et s.c.i. $f\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ et $\gamma > 0$. Alors pour tout $x \in \mathcal{H}$ la fonction $y \mapsto f(y) + \|y - x\|^2/(2\gamma)$ admet un minimiseur unique sur $\mathcal{H}$ que l'on note suivant Moreau [33] $\mathrm{prox}_\gamma^f x$. L'opérateur ainsi défini peut s'écrire $\mathrm{prox}_\gamma^f = J_\gamma^{\partial f}$, où ∂f est le sous-différentiel de f. Puisque ∂f est maximal monotone et admet ∂f^* comme inverse, où f^* est la conjuguée de Legendre-Fenchel de f, la décomposition (15) nous donne

$$x = x^{\oplus} + x^{\ominus}, \quad \text{où} \quad x^{\oplus} = \mathrm{prox}_\gamma^f x \ \text{ et } \ x^{\ominus} = \gamma\, \mathrm{prox}_{1/\gamma}^{f^*}(x/\gamma). \tag{16}$$

C'est précisément (pour $\gamma = 1$) le principe de décomposition de Moreau [33, 34]. On obtient ici une décomposition de signaux paramétrée par une fonction. Pour fixer les idées, prenons pour f la distance d_S à un convexe fermé S représentant une contrainte donnée. Alors, P_S étant le projecteur relatif à S,

$$\mathrm{prox}_\gamma^f x = \begin{cases} x + \dfrac{\gamma}{d_S(x)}(P_S x - x) & \text{si } \ d_S(x) > \gamma \\ P_S x & \text{si } \ d_S(x) \leq \gamma. \end{cases} \tag{17}$$

Donc $x^{\oplus}$ est la projection du signal x sur S si x est suffisamment proche de S et une projection adaptativement sous-relaxée si x est loin de S. Ici, le seuil de proximité γ sera déterminé en fonction de la précision de la contrainte. Pour $S = \{0\}$, $f = \|\cdot\|$ et on est ramené à un type de seuillage courant en détection, γ étant lié au niveau de bruit. Dans le même ordre d'idée, si f est la norme BV, alors $x^{\oplus}$ correspond au filtrage par minimisation de la variation totale régularisée de [44]. Ceci a été noté dans [31], où l'on trouvera une analyse très originale de cette méthode et de problèmes connexes. Le lien entre la régularisation de Moreau-Yosida de fonctions non-différentiables et le seuillage doux est abordé dans un cadre plus restreint dans [37].

Si f est l'indicatrice ι_S d'un convexe fermé S (elle prend valeur 0 sur S et $+\infty$ sur $\complement S$), alors $\mathrm{prox}_\gamma^f = P_S$. Un scénario particulièrement intéressant est celui où S est un cône convexe fermé K. Ce type de contrainte est fréquent dans les applications en traitement du signal : holographie (signaux dont la phase de Fourier est connue), imagerie ou spectroscopie (signaux positifs), prédiction (la fonction d'auto-corrélation d'un signal a une transformée de Fourier positive), etc. Dans ce contexte, $f^* = \iota_{K^\ominus}$, où $K^\ominus$ est le cône polaire de K, et (16) entraîne $x^{\oplus} = P_K x$, $x^{\ominus} = P_{K^\ominus} x$, et $x^{\oplus} \perp x^{\ominus}$: il s'agit de la décomposition polaire de Moreau [32], qui se réduit à la décomposition classique de la Section 3.1 quand K est un s.e.v.

3.3 Analyse hiérarchisée non-linéaire

L'analyse hiérarchisée d'un signal $x \in \mathcal{H}$ consiste à produire une suite $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ d'approximations monotones en un sens donné. Dans l'analyse multi-résolution classique [29], le passage de j à $j+1$ traduit une perte d'information progressive dans les détails fins. Cette transition s'articule autour d'une décomposition suivant deux espaces orthogonaux. On se donne une suite décroissante de s.e.v. fermés $(M_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ possédant certaines propriétés et on définit l'approximation au niveau j par $x_j = P_j x$, où P_j est le projecteur relatif à M_j. Notons $d_{j+1} = x_j - x_{j+1}$ le signal des détails perdus lors de ce changement de résolution. Alors, grâce aux propriétés des projecteurs linéaires, $x_j = x_{j+1} + d_{j+1}$ donne une décomposition suivant M_j et son complémentaire orthogonal. Ce type d'analyse linéaire a l'inconvénient de produire un gommage uniforme des détails qui ne préserve pas certains attributs tels que les contours et autres structures transitoires.

L'analyse convexe ouvre une voie pour construire une analyse hiérarchisée non-linéaire. La discussion ci-dessus suggère d'utiliser (15) comme règle de décomposition. On se donne ainsi une suite d'opérateurs maximaux monotones convenables $(A_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et à la résolution j on obtient (avec $\gamma_j = 1$ pour simplifier les notations)

$$x_j = x_{j+1} + d_{j+1}, \quad \text{où} \quad x_{j+1} = J^{A_j} x_j \;\text{ et }\; d_{j+1} = J^{A_j^{-1}} x_j. \tag{18}$$

Nous détaillerons les propriétés de ce type d'analyse lors de l'exposé oral et notons seulement ici les deux cas particuliers suivants :

- Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite croissante de fonctions convexes s.c.i. propres de $\mathcal{H}$ dans $]-\infty, +\infty]$ et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, soit A_j le sous-différentiel de f_j. Alors au niveau j, $x_j = \operatorname{prox}^{f_j} x$ et, sous des hypothèses convenables, la décomposition (18) a lieu. On peut aussi définir un processus dual basé sur les fonctions conjuguées $(f_j^*)_{j\in\mathbb{Z}}$ en posant $x_j^* = \operatorname{prox}^{f_j^*} x$. La décomposition de Moreau donne alors à chaque niveau de résolution j l'identité $x = x_j + x_j^*$ tandis que $d_j^* = -d_j$. Ainsi, la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ produit l'analyse d'un signal x et la suite duale $(x_j^*)_{j\in\mathbb{Z}}$ sa synthèse.
- Soit $(C_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite décroissante de convexes fermés de $\mathcal{H}$ et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, soit A_j le cône normal à C_j. On obtient alors le cadre de travail proposé dans [20], dans lequel s'inscrit l'analyse multi-résolution linéaire classique.

Références

[1] H. C. Andrews and B. R. Hunt, *Digital Image Restoration*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1977.

[2] J.-P. Aubin, *L'Analyse Non Linéaire et Ses Motivations Economiques*. Paris : Masson, 1984.

[3] C. Auyeung and R. M. Mersereau, *A dual approach to signal restoration*, in Springer Series in Information Science, vol. 23, pp. 21-56, 1991.

[4] V. Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces,* 2nd ed. Boston, MA : D. Reidel, 1986.

[5] H. H. Bauschke, *Projection algorithms : Results and open problems,* in Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization, (D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, Eds.). New York : Elsevier, 2001.

[6] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, *On projection algorithms for solving convex feasibility problems*, SIAM Rev., vol. 38, pp. 367-426, 1996.

[7] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes, *Algorithms for Bregman monotone sequences*, en préparation.

[8] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res., vol. 26, 2001.

[9] H. H. Bauschke, D. Noll, A. Celler, and J. M. Borwein, *An EM-algorithm for dynamic SPEC tomography*, IEEE Trans. Medical Imaging, vol. 18, pp. 252-261, 1999.

[10] J. M. Borwein, A. S. Lewis, and D. Noll, *Maximum entropy reconstruction using derivative information. I : Fisher information and convex duality*, Math. Oper. Res., vol. 21, pp. 442-468, 1996.

[11] L. M. Bregman, *The method of successive projection for finding a common point of convex sets*, Soviet Math. Dokl., vol. 6, pp. 688-692, 1965.

[12] A. K. Brodzik and J. M. Mooney, *Convex projections algorithm for restoration of limited-angle chromotomographic images*, J. Opt. Soc. Amer. A, vol. 16, pp. 246-257, 1999.

[13] Y. Censor and S. A. Zenios, *Parallel Optimization – Theory, Algorithms and Applications.* New York : Oxford University Press, 1997.

[14] P. L. Combettes, *The foundations of set theoretic estimation*, Proc. IEEE, vol. 81, pp. 182-208, 1993.

[15] P. L. Combettes, *The convex feasibility problem in image recovery*, in Advances in Imaging and Electron Physics (P. Hawkes, Ed.), vol. 95, pp. 155-270. New York : Academic Press, 1996.

[16] P. L. Combettes, *Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections*, IEEE Trans. Image Process., vol. 6, pp. 493-506, 1997.

[17] P. L. Combettes, *Hilbertian convex feasibility problem : Convergence of projection methods*, Appl. Math. Optim., vol. 35, pp. 311-330, 1997.

[18] P. L. Combettes, *Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms*, in Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization, (D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, Eds.). New York : Elsevier, 2001.

[19] P. L. Combettes and P. Bondon, *Hard-constrained inconsistent signal feasibility problems*, IEEE Trans. Signal Process., vol. 47, pp. 2460-2468, 1999.

[20] P. L. Combettes and J. C. Pesquet, *Convex multiresolution analysis*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 20, pp. 1308-1318, 1998.

[21] I. Ekeland, *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics.* New York : Springer, 1990.

[22] I. Ekeland and R. Témam, *Convex Analysis and Variational Problems,* 2nd ed. Philadelphia, PA : SIAM, 1999.

[23] R. Féron, *Convexité et information*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. A234, pp. 1840-1841, 1952.

[24] R. Fortet, *Sur une méthode de A. Papoulis pour l'extrapolation d'un signal*, Ann. Télécommunic., vol. 36, pp. 413-420, 1981.

[25] R. W. Gerchberg, *Super-resolution through error energy reduction*, Optica Acta, vol. 21, pp. 709-720, 1974.

[26] K. C. Kiwiel and B. Łopuch, *Surrogate projection methods for finding fixed points of firmly nonexpansive mappings*, SIAM J. Optim., vol. 7, pp. 1084-1102, 1997.

[27] A. N. Iusem and M. Teboulle, *A regularized dual-based iterative method for a class of image reconstruction problems*, Inverse Problems, vol. 9, pp. 679-696, 1993.

[28] R. M. Leahy and C. E. Goutis, *An optimal technique for constraint-based image restoration and reconstruction*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. 34, pp. 1629-1642, 1986.

[29] S. G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd ed. New York : Academic, 1999.

[30] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs.* Paris : Hermann, 1990.

[31] Y. Meyer, *Oscillating Patterns in Image Processing and in Some Nonlinear Evolution Equations.* The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures, à paraître.

[32] J.-J. Moreau, *Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. A255, pp. 238-240, 1962.

[33] J.-J. Moreau, *Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. A255, pp. 2897-2899, 1962.

[34] J.-J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France, vol. 93, pp. 273-299, 1965.

[35] J.-J. Moreau, *Fonctionnelles Convexes.* Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles II, Collège de France, Paris, 1966-1967.

[36] H. Moulin and F. Fogelman-Soulié, *La Convexité dans les Mathématiques de la Décision : Optimisation et Théorie Micro-Economique.* Paris : Hermann, 1979.

[37] M. Nikolova, *Local strong homogeneity of a regularized estimator*, SIAM J. Appl. Math., vol. 61, pp. 633-658, 2000.

[38] D. Noll, *Restoration of degraded images with maximum entropy*, J. Gobal Optim., vol. 10, pp. 91-103, 1997.

[39] A. Papoulis, *A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation*, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 22, pp. 735-742, 1975.

[40] A. J. Patti and Y. Altunbasak, *Artifact reduction for set theoretic super resolution image reconstruction with edge adaptive constraints and higher-order interpolants*, IEEE Trans. Image Process., vol. 10, pp. 179-186, 2001.

[41] J. C. Pesquet and P. L. Combettes, *Wavelet synthesis by alternating projections*, IEEE Trans. Signal Process., vol. 44, pp. 728-732, 1996.

[42] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 1970.

[43] R. T. Rockafellar, *Conjugate Duality and Optimization.* Philadelphia, PA : SIAM, 1974.

[44] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D, vol. 60, pp. 259-268, 1992.

[45] G. Sharma, *Set theoretic estimation for problems in subtractive color*, Color Res. Appl., vol. 25, pp. 333-348, 2000.

[46] H. Stark (Ed.), *Image Recovery : Theory and Application.* San Diego, CA : Academic Press, 1987.

[47] H. Stark and Y. Yang, *Vector Space Projections : A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics.* New York : Wiley, 1998.

[48] H. J. Trussell and M. R. Civanlar, *The feasible solution in signal restoration*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. 32, pp. 201-212, 1984.

[49] A. Vanderlugt, *Optical Signal Processing.* New York : Wiley, 1992.

[50] H. S. Witsenhausen, *Some aspects of convexity useful in information theory*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 26, pp. 265-271, 1980.

[51] D. C. Youla, *Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections*, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 25, pp. 694-702, 1978.

[52] D. C. Youla and H. Webb, *Image restoration by the method of convex projections : Part 1 – theory*, IEEE Trans. Medical Imaging, vol. 1, pp. 81-94, 1982.

[53] L. A. Zadeh, *What is optimal ?*, IRE Trans. Inform. Theory, vol. 4, p. 3, 1958.